ECOLE SUPERIEURE DE PLASTURGIE

CONCOURS D'ENTREE EN 1ère ANNEE
CYCLE INGENIEURS 2001

Epreuve de Mathématiques
Durée : 4 heures

Les calculatrices programmables et alphanumériques sont autorisées, dans les conditions définies dans la circulaire n° 99-018 du 1 Février 1999.

La clarté et la rigueur des raisonnements ainsi que la qualité de la rédaction (présentation, lisibilité, orthographe) seront des éléments importants d'appréciation des copies.

Les candidats devront traiter les deux problèmes, qui sont indépendants.

L'énoncé comporte 6 pages.

Problème d'algèbre.

A) Etude d'endomorphismes tels que $u \circ u = 0$.

Soit E un espace vectoriel de dimension n, u un endomorphisme non nul de E tel que $u \circ u = 0$, r le rang de u et p la dimension du noyau de u.

1 - a) Montrer que $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

b) En déduire que $r \leq \frac{n}{2}$ et $p \geq \frac{n}{2}$.

2 - Pour cette question, on suppose que $n = 2$:

a) Justifier que $\text{Im}(u) = \text{Ker}(u)$.

b) Soient $\boldsymbol{i}$ un vecteur non nul appartenant à Im(u) et $\boldsymbol{j}$ un vecteur tel que $u(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{i}$.

Montrer que $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ est une base de E , et donner la matrice de u dans cette base.

3 - Pour cette question, on suppose $n = 3$:

a) Montrer que $r = 1$. Quelle est la dimension de Ker(u) ?

b) Soit $\boldsymbol{k}$ un vecteur de E n'appartenant pas à Ker(u) et $\boldsymbol{i} = u(\boldsymbol{k})$. Justifier l'existence d'un vecteur $\boldsymbol{j}$ de Ker(u), non colinéaire à $\boldsymbol{i}$, puis démontrer que $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ est une base de E.

c) Déterminer la matrice de u dans cette base.

B) Application à un exemple.

On rappelle que $M_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels, et $GL_3(\mathbb{R})$ l'ensemble constitué par les matrices inversibles de $M_3(\mathbb{R})$.

Dans cette partie, I désigne la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$ et J est la matrice définie par :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1 - Soit v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, dont la matrice relative à la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est J .

a) Vérifier que $v \circ v = 0$.

b) Déterminer le noyau et l'image de v . Préciser leur dimension .

c) Trouver une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle v ait pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on notera P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à $\mathcal{B}$.

2 - On considère l'ensemble Δ des matrices M de $M_3(\mathbb{R})$ de la forme $M = I + mJ$ $(m \in \mathbb{R})$.

a) Démontrer que Δ est stable pour la multiplication matricielle.

b) Montrer alors que Δ est un sous-groupe multiplicatif de $GL_3(\mathbb{R})$, isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.

c) L'ensemble Δ est-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$?

3 - Soit $M = I + mJ$ où m est un réel non nul. On se propose dans cette question de trouver toutes les matrices X de $M_3(\mathbb{R})$ solutions de l'équation (1) : $X^2 = M$.

a) Quelles sont les solutions de (1) appartenant à Δ ?

b) Justifier l'égalité $P^{-1} M P = N$, N désignant la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Montrer qu'en posant $Y = P^{-1} X P$, l'équation (1) équivaut à l'équation (2) : $Y^2 = N$.

d) Soit $Y = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ solution de (2).

Montrer que $YN = NY$. En déduire que Y est triangulaire supérieure et que $i = a$.

e) Résoudre l'équation (2). On vérifiera qu'il y a une infinité de solutions, dont on précisera la forme.

f) Exprimer alors les solutions de (1) à l'aide de la matrice P (aucun calcul n'est demandé).

Fin du problème.

Problème d'Analyse.

Certains phénomènes peuvent être étudiés en utilisant soit des fonctions vérifiant une équation différentielle, soit des suites vérifiant une relation de récurrence.

Dans le cas où l'on utilise des équations différentielles (modèle « continu »), on adopte généralement les notations suivantes : le temps est représenté par la variable t décrivant $\mathbb{R}_+$, la grandeur étudiée est représentée par une fonction $y(t)$. L'évolution du système se traduit souvent par une relation entre $y(t)$ et sa dérivée $y'(t)$.

Dans le cas où l'on utilise des suites (modèle « discret »), on adopte généralement les notations suivantes : le temps est représenté par la variable n décrivant $\mathbb{N}$, la grandeur étudiée est représentée par une suite (u_n). L'évolution du système se traduit par une relation entre u_n et u_{n+1}. Le rôle de la dérivée est joué par $u_{n+1} - u_n$.

On se propose de comparer les résultats donnés par ces deux méthodes sur des exemples.

Partie A.

a est un paramètre donné vérifiant $0 < a < 1$.

1) Déterminer la fonction $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} \forall t \geq 0,\ y'(t) = -a\,y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

   Donner une allure de la représentation graphique de $y(t)$ en fonction de t.

2) Exprimer u_n en fonction de n lorsque la suite réelle u vérifie $\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n = -a\,u_n \\ u_0 = 1 \end{cases}$.

   Donner l'allure de la représentation graphique de u_n en fonction de n.

3) On fixe l'entier naturel n, non nul. Calculer un développement limité d'ordre 2 quand $a \to 0$ de u_n et de $y(n)$; donner un équivalent de $y(n) - u_n$ quand $a \to 0$.

4) Calculer $\lim\limits_{T \to +\infty} \int_0^T y(t)\,dt$ et $\lim\limits_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n$.

Partie B.

a et b sont des paramètres donnés vérifiant $0 < a < 1$ et $a < b$.

1) Déterminer la fonction $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} \forall t \geq 0,\ y'(t) = -a\,y(t) + b \\ y(0) = 1 \end{cases}$.

   Préciser le sens de variation de y, calculer la limite de $y(t)$ lorsque $t \to +\infty$, et donner l'allure de la

représentation graphique de $y(t)$ en fonction de t.

Soit ε un nombre réel, vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{b}{a} - 1$. Déterminer le plus petit nombre réel t_ε tel que :

$$\forall t \geq t_\varepsilon \, , \; \frac{b}{a} - \varepsilon \leq y(t) \leq \frac{b}{a} + \varepsilon \, .$$

2) Exprimer u_n en fonction de n lorsque la suite réelle u vérifie :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \; u_{n+1} - u_n = -a u_n + b \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

(on pourra considérer la suite auxiliaire définie par $v_n = u_n - \frac{b}{a}$).

Préciser le sens de variation de u, calculer la limite de u_n lorsque $n \to +\infty$, et donner l'allure de la représentation graphique de u_n en fonction de n.

Etant donné le nombre $\varepsilon > 0$ (tel que $\varepsilon < \frac{b}{a} - 1$), déterminer le plus petit nombre entier n_ε tel que :

$$\forall n \geq n_\varepsilon, \; \frac{b}{a} - \varepsilon \leq u_n \leq \frac{b}{a} + \varepsilon .$$

3) Calculer explicitement n_ε, et donner la partie entière de t_ε lorsque $a = 10^{-1}$, $b = 1$, $\varepsilon = 10^{-3}$.

Partie C.

Lorsque dans le modèle « continu » la dérivée seconde $y''(t)$ intervient, elle est remplacée dans le modèle « discret » par $(u_{n+2} - u_{n+1}) - (u_{n+1} - u_n) = u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n$.

a et γ sont des paramètres donnés vérifiant $0 < \gamma < a < 1$.

1) Déterminer la fonction $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} \forall t \geq 0, \; y''(t) = a^2 \, y(t) \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -\gamma \end{cases}$

(on écrira les solutions à l'aide d'exponentielles et non à l'aide de fonctions hyperboliques).

Donner la limite et un équivalent simple de $y(t)$ lorsque $t \to +\infty$.

Etudier les variations de $y(t)$ en fonction de t ;

on montrera que $y(t)$ admet un extremum à l'instant $t_a = \frac{1}{2a} \times \ln \frac{a+\gamma}{a-\gamma}$, et on précisera s'il s'agit d'un maximum ou d'un minimum.

2) On se propose d'exprimer u_n en fonction de n lorsque la suite réelle u vérifie :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} - 2\,u_{n+1} + u_n = a^2 u_n \\ u_0 = 1 \\ u_1 - u_0 = -\gamma \end{cases}$$

Auparavant, il est nécessaire de traiter quelques questions préliminaires :

a) Soit $\mathbf{S}$ l'ensemble des suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+2} - 2\,x_{n+1} + x_n = a^2 x_n\ .$$

Montrer que $\mathbf{S}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.

b) Montrer que l'application $L : x \mapsto (x_0, x_1)$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbf{S}$ vers l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$; quelle est la dimension de $\mathbf{S}$?

c) Déterminer deux éléments de $\mathbf{S}$ de la forme $(\rho^n)_{n\in\mathbb{N}}$, avec $\rho \in \mathbb{R}^*$.

d) En déduire que la forme générale des éléments de $\mathbf{S}$ est $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = H(1-a)^n + K(1+a)^n$, H et K désignant des constantes réelles.

3) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Donner la limite et un équivalent simple de u_n lorsque $n \to +\infty$.

Etudier les variations de u_n en fonction de n ; on montrera que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0 \Leftrightarrow n \geq s_a \text{ avec } s_a = \frac{1}{\ln\dfrac{1+a}{1-a}} \times \ln\frac{a+\gamma}{a-\gamma}\ .$$

4) On pose $\gamma = \dfrac{a}{2}$.

a) Calculer $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{t_a}{s_a}$.

b) Préciser les parties entières de t_a et de s_a lorsque $a = 10^{-2}$.

Fin du problème.